

Théories des jeux (notes de cours)

David A. Madore

4 février 2019

MITRO206

Git : 84b79fd Thu May 31 13:56:09 2018 +0200

Table des matières

1	Introduction et typologie	2
1.1	La notion de jeu mathématique : généralités	2
1.2	Quelques types de jeux	3
1.3	Quelques exemples en vrac	5
1.4	Remarques	16
1.5	Plan	16
2	Jeux en forme normale	17
2.1	Généralités	17
2.2	Équilibres de Nash	19
2.3	Jeux à somme nulle : le théorème du minimax	23
3	Jeux de Gale-Stewart et détermination	27
3.1	Définitions	27
3.2	Topologie produit	32
3.3	Détermination des jeux ouverts	33
3.4	Détermination des jeux combinatoires	36
3.5	Détermination pour les stratégies positionnelles	38
4	Théorie de l'induction bien-fondée	44
4.1	Graphes orientés bien-fondés	44
4.2	Généralisations aux graphes non nécessairement bien-fondés	51
4.3	Écrasement transitif	55

5	Introduction aux ordinaux	57
5.1	Présentation informelle	57
5.2	Ensembles bien-ordonnés et induction transfinie	62
5.3	Comparaison d'ensembles bien-ordonnés, et ordinaux	64
5.4	Ordinaux successeurs et limites	68
5.5	Somme, produit et exponentielle d'ordinaux	69
5.6	Retour sur le jeu de l'hydre	75
6	Jeux combinatoires impartiaux à information parfaite	77
6.1	Récapitulations	77
6.2	Somme de nim	78
7	Notions sur les combinatoires partisans à information parfaite	85
7.1	Jeux partisans, ordre, et somme	85
7.2	Lien entre jeux partisans et jeux impartiaux	89
7.3	Les nombres surréels (une esquisse)	91
8	Exercices	94
8.2	Jeux en forme normale	94
8.3	Jeux de Gale-Stewart et détermination	103
8.5	Introduction aux ordinaux	108
8.6	Jeux combinatoires à information parfaite	111

1 Introduction et typologie

1.1 La notion de jeu mathématique : généralités

1.1.1. Il n'existe pas une théorie des jeux mais *des* théories des jeux.

Il n'est pas possible de donner une définition générale précise de la notion de « jeu mathématique ». On verra plus loin des définitions précises de certains types de jeux (p. ex., les jeux impartiaux à information parfaite), mais il n'existe pas de définition générale utile qui s'applique à tous ces types, et à partir de laquelle on pourrait développer une théorie intéressante.

Pire, différentes disciplines se sont développées sous le nom de « théorie des jeux », chacune donnant une définition différente de ce qu'est un « jeu ». Par exemple, l'étude des jeux « en forme normale » (=jeux définis par des matrices de gains), la théorie combinatoire des jeux (jeux à information parfaite), la théorie des jeux logiques, la théorie des jeux différentiels, etc. Il n'existe donc pas une mais plusieurs théories des jeux.

Ces différentes théories des jeux intersectent différentes branches des mathématiques ou d'autres sciences : probabilités, optimisation/contrôle,

combinatoire, logique, calculabilité, complexité, analyse/EDP ou encore (en-dehors ou en marge des mathématiques), économie, cryptographie, physique quantique, cybernétique, biologie, sociologie, linguistique, philosophie.

Il va de soi qu'on ne pourra dans ce cours donner qu'un aperçu de quelques unes de ces théories des jeux.

1.1.2. Une tentative pour approcher la notion de jeu mathématique : le jeu possède un **état**, qui évolue dans un ensemble (fini ou infini) d'états ou **positions** possibles ; un certain nombre de **joueurs** choisissent, simultanément ou consécutivement, un **coup** à jouer parmi différentes **options**, en fonction de l'état courant, ou peut-être seulement d'une fonction de l'état courant ; ce coup peut éventuellement faire intervenir un aléa (hasard voulu par le joueur) ; l'état du jeu évolue en fonction des coups des joueurs et éventuellement d'un autre aléa (hasard intrinsèque au jeu) ; au bout d'un certain nombre de coups (fini ou infini), la règle du jeu attribue, en fonction de l'état final, ou de son évolution complète, un **gain** à chaque joueur, ce gain pouvant être un réel (gain numérique), l'étiquette « gagné » / « perdu », ou encore autre chose, et chaque joueur cherche en priorité à maximiser son gain (i.e., à gagner le plus possible, ou à gagner tout court), ou dans le cas probabiliste, son espérance de gain.

Mais même cette définition très vague est incomplète !, par exemple dans le cas des jeux différentiels, les coups n'ont pas lieu tour à tour mais continûment.

Une **stratégie** d'un joueur est la fonction par laquelle il choisit son coup à jouer en fonction de l'état du jeu (ou de la fonction de l'état qui lui est présentée), et d'aléa éventuel. On peut ainsi résumer le jeu en : chaque joueur choisit une stratégie, et la règle du jeu définit alors un gain pour chaque joueur. Les stratégies peuvent être contraintes de différentes manières (par exemple : être calculables par une machine de Turing). Une stratégie est dite **gagnante** si le joueur qui l'utilise gagne le jeu (supposé avoir une notion de « joueur gagnant ») quels que soient les coups choisis par l'autre joueur.

Il faut aussi se poser la question de si les joueurs peuvent communiquer entre eux (et si oui, s'ils peuvent prouver leur honnêteté ou s'engager irrévocablement quant au coup qu'ils vont jouer, etc.). Dans certains cas, on peut aussi être amené à supposer que les joueurs ne connaissent pas toute la règle du jeu (voir « information complète » ci-dessous).

1.2 Quelques types de jeux

1.2.1. Le **nombre de joueurs** est généralement 2. On peut néanmoins étudier des jeux multi-joueurs, ce qui pose des questions d'alliances et compliquer la question des buts (un joueur peut être incapable de gagner lui-même mais être en situation de décider quel autre joueur gagnera : on parle de « kingmaker »). On peut aussi

étudier des jeux à un seul joueur (jouant contre le hasard), voire à zéro joueurs (systèmes dynamiques), mais ceux-ci relèvent plutôt d'autres domaines. Dans ce cours, on s'intéressera (presque uniquement) aux jeux à deux joueurs.

1.2.2. Les joueurs peuvent avoir des intérêts communs, opposés, ou toute situation intermédiaire.

Le cas d'intérêts communs est celui où tous les joueurs ont le même gain. Si les joueurs peuvent parfaitement communiquer, on est alors essentiellement ramené à un jeu à un seul joueur : on s'intéresse donc ici surtout aux situations où la communication est imparfaite.

Le cas de deux joueurs d'intérêts opposés est le plus courant : dans le cas de gains numériques, on le modélise en faisant des gains d'un joueur l'opposé des gains de l'autre — on parle alors de **jeu à somme nulle** ; ou bien la règle fera qu'un et un seul joueur aura gagné et l'autre perdu (mais parfois, elle peut aussi admettre le match nul).

Toute autre situation intermédiaire est possible. Mais on conviendra bien que le but de chaque joueur est de maximiser son propre gain, sans considération des gains des autres joueurs.

1.2.3. Le jeu peut être partial/partisan ou impartial. Un jeu impartial est un jeu où tous les joueurs sont traités de façon équivalente par la règle (le sens de « équivalent » étant à définir plus précisément selon le type de jeu).

1.2.4. Les coups des joueurs peuvent avoir lieu simultanément ou séquentiellement.

Formellement, il s'agit seulement d'une différence de présentation. On peut toujours ramener des coups séquentiels à plusieurs coups simultanés en n'offrant qu'une seule option à tous les joueurs sauf l'un, et réciproquement, on peut ramener des coups simultanés à des coups séquentiels en cachant à chaque joueur l'information de ce que l'autre a joué. La question 1.4.1 est cependant plus intéressante.

1.2.5. Le jeu peut être à information parfaite ou non. Un jeu à information parfaite est un jeu dont la règle ne fait pas intervenir le hasard et où chaque joueur joue séquentiellement en ayant la connaissance complète de l'état du jeu et de tous les coups effectués antérieurement par tous les autres joueurs.

(Cette notion est parfois distinguée de la notion plus faible d'**information complète**, qui souligne que les joueurs ont connaissance complète de la *règle* du jeu, i.e., des gains finaux et des options disponibles à chaque joueur. Néanmoins, on peut formellement ramener un jeu à information incomplète en jeu à information complète en regroupant toute l'inconnue sur les règles du jeu dans des coups d'un joueur appelé « la nature ». Dans ce cours, on ne considérera que des jeux à information parfaite [et toute occurrence des mots « information

complète » sera probablement un lapsus pour « information parfaite »].)

1.2.6. Le nombre de positions (= états possibles), comme le nombre d'options dans une position donnée, ou comme le nombre de coups, peut être **fini ou infini**. Même si l'étude des jeux finis (de différentes manières) est la plus intéressante pour des raisons pratiques, toutes sortes de jeux infinis peuvent être considérés, par exemple en logique (voir plus loin sur l'axiome de détermination). Pour un jeu à durée infinie, le gagnant pourra être déterminé, par exemple, par toute la suite des coups effectués par les deux joueurs ; on peut même introduire des coups après un nombre infini de coups, etc.

De même, l'ensemble des positions, des options ou des temps peut être **discret ou continu**. Dans ce cours, on s'intéressera presque exclusivement au cas discret (on écartera, par exemple, la théorie des jeux différentiels).

1.3 Quelques exemples en vrac

1.3.1. Le jeu de **pile ou face** entre Pauline et Florian. On tire une pièce non-truquée : si elle tombe sur pile, Pauline gagne, si c'est face, c'est Florian. Aucun des joueurs n'a de choix à faire. Chacun a une probabilité $\frac{1}{2}$ de gagner, ou une espérance de 0 si les gains sont +1 au gagnant et -1 au perdant (il s'agit donc d'un jeu à somme nulle).

Variante entre Alice et Bob : maintenant, Alice choisit « pile » ou « face » avant qu'on (Bob) tire la pièce. Si Alice a bien prévu, elle gagne, sinon c'est Bob. Ici, seule Alice a un choix à faire. Néanmoins, il n'y a pas de stratégie intéressante : la stratégie consistant à choisir « pile » offre la même espérance que celle consistant à choisir « face », et il n'existe pas de stratégie (c'est-à-dire, de stratégie mesurable par rapport à l'information dont dispose Alice) offrant une meilleure espérance.

1.3.2. Variante : Alice choisit « pile » ou « face », l'écrit dans une enveloppe scellée sans la montrer à Bob (elle s'*engage* sur son choix), et Bob, plutôt que tirer une pièce, choisit le côté qu'il montre. Si Alice a bien deviné le choix de Bob, Alice gagne, sinon c'est Bob. Variante : Bob choisit une carte dans un jeu de 52 cartes sans la montrer à Alice, et Alice doit deviner si la carte est noire ou rouge.

Variante équivalente : Alice choisit « Alice » ou « Bob » et Bob choisit simultanément « gagne » ou « perd ». Si la phrase obtenue en combinant ces deux mots est « Alice gagne » ou « Bob perd », alors Alice gagne, si c'est « Alice perd » ou « Bob gagne », alors Bob gagne. Encore une variante : Alice et Bob choisissent simultanément un bit (élément de $\{0, 1\}$), si le XOR de ces deux bits vaut 0 alors Alice gagne, s'il vaut 1 c'est Bob. Ce jeu est impartial (même s'il n'est pas parfaitement symétrique entre les joueurs) : Alice n'a pas d'avantage particulier sur Bob (ce qui est assez évident sur ces dernières variantes).

↓Alice, Bob→	0/« gagne »	1/« perd »
0/« Alice »	+1, -1	-1, +1
1/« Bob »	-1, +1	+1, -1

La notion de coups simultanés peut se convertir en coups engagés dans une enveloppe scellée (cf. 1.2.4).

On verra, et il est assez facile de comprendre intuitivement, que la meilleure stratégie possible pour un joueur comme pour l'autre, consiste à choisir l'une ou l'autre des deux options offertes avec probabilité $\frac{1}{2}$ (ceci assure une espérance de gain nul quoi que fasse l'autre joueur).

(En pratique, si on joue de façon répétée à ce jeu, il peut être intéressant d'essayer d'exploiter le fait que les humains ont des générateurs aléatoires assez mauvais, et d'arriver à prédire leurs coups pour gagner. Ceci est particulièrement amusant avec des petits enfants. Voir aussi la « battle of wits » du film *Princess Bride* à ce sujet.)

1.3.3. Le jeu de pierre-papier-ciseaux : Alice et Bob choisissent simultanément un élément de l'ensemble {pierre, papier, ciseaux}. S'ils ont choisi le même élément, le jeu est nul; sinon, papier gagne sur pierre, ciseaux gagne sur papier et pierre gagne sur ciseaux (l'intérêt étant qu'il s'agit d'un « ordre » cyclique, totalement symétrique entre les options). Il s'agit toujours d'un jeu à somme nulle (disons que gagner vaut +1 et perdre vaut -1), et cette fois les deux joueurs sont en situation complètement symétrique.

↓Alice, Bob→	Pierre	Papier	Ciseaux
Pierre	0, 0	-1, +1	+1, -1
Papier	+1, -1	0, 0	-1, +1
Ciseaux	-1, +1	+1, -1	0, 0

On verra que la meilleure stratégie possible consiste à choisir chacune des options avec probabilité $\frac{1}{3}$ (ceci assure une espérance de gain nul quoi que fasse l'autre joueur).

Ce jeu s'appelle aussi papier-ciseaux-puits, qui est exactement le même si ce n'est que « pierre » s'appelle maintenant « puits » (donc ciseaux gagne sur papier, puits gagne sur ciseaux et papier gagne sur puits) : la stratégie optimale est évidemment la même.

Certains enfants, embrouillés par l'existence des deux variantes, jouent à pierre-papier-ciseaux-puits, qui permet les quatre options, et où on convient que la pierre tombe dans le puits : quelle est alors la stratégie optimale ? il est facile de se convaincre qu'elle consiste à ne jamais jouer pierre (qui est strictement « dominée » par puits), et jouer papier, ciseaux ou puits avec probabilité $\frac{1}{3}$ chacun (cette stratégie garantit un gain au moins nul quoi que fasse l'autre adversaire, et même strictement positif s'il joue pierre avec probabilité strictement positive).

Ceci est un exemple, cliquez sur le lien de téléchargement pour obtenir le cours complet.

